

Versuch M9-Reversionspendel

P. Schäfer

Institut für Physik, Humboldt-Universität zu Berlin,
Newtonstraße 15, 12489 Berlin

4. Mai 2018

Ziel des Versuches M9 (zu Details sei auf Physikalisches Grundpraktikum: Mechanik und Thermodynamik (2012) verwiesen) ist die Ermittlung der Erdbeschleunigung am Standort Berlin Adlershof mit Hilfe eines Reversionspendels. Die Idee, dafür ein Pendel mit reziproken Achsen zu benutzen, wurde erstmals von J. G. F. Bohnenberger (1811) publiziert. Das erste Reversionspendel wurde von H. Kater (1818) konstruiert und für Messungen eingesetzt. Über mehr als 150 Jahre, bis Ende der sechziger Jahre des letzten Jahrhunderts, wurden Reversionspendel zur Absolutbestimmung der Erdbeschleunigung verwendet. Bei den 1969 in Potsdam durchgeführten Messung wurde g mit $(981260,1 \pm 0,3)\text{mGal}$ bestimmt (J. Höpfner (2012)). Dies waren die genauesten Messungen, die mit Reversionspendeln durchgeführt wurden. In den folgenden Jahren wurden sie von den noch präziseren Fallgravimetern abgelöst.

Mit einem solchen Pendel reduziert sich die gestellte Aufgabe auf die Messung des Abstandes der beiden Achsen, welcher der Länge eines gleich schwingenden mathematischen Pendels entspricht, und die Bestimmung der für beide Achsen identischen Periodendauer.

Als Messgeräte stehen im Praktikum ein Anbaumessschieber und eine elektronische, durch eine Lichtschranke gesteuerte Stoppuhr zur Verfügung. Der systematische Restfehler des verwendeten Längenmessgerätes beträgt nach den Angaben des Herstellers $u_{sys} = 0.02 \text{ mm} + 5 \cdot 10^{-5} l$. Der aus zehnmahliger Wiederholung der Messung bestimmte zufällige Fehler, der Vertrauensbereich des ermittelten Mittelwertes, beträgt meist weniger als 0.05 mm. Der daraus resultierende relative Gesamtfehler u_l/l der Längenmessung liegt bei einem Schneidenabstand des Reversionspendels von $\approx 1000 \text{ mm}$ unter $1.5 \cdot 10^{-4}$. Dies wird auch durch die Standardabweichung der von den Studenten in den vergangenen Jahren an den einzelnen Messplätzen ermittelten Werte für den Schneidenabstand untermauert, die unter 0.15 mm liegt.

Die von der Elektronikwerkstatt des Instituts für Physik gebauten, von einer Lichtschranke gesteuerten Stoppuhren nutzen als Zeitnormal einen thermisch stabilisierten Schwingquarz mit einer Sollfrequenz von 1 MHz. Die gemessene Frequenzabweichung ist kleiner als 1 Hz. Die Zeitauflösung der Digitalanzeige beträgt 1 ms. Daraus ergibt sich ein systematischer Restfehler für die Zeitmessung von $u_{sys} = 10^{-3} \text{ s} + 10^{-6} t$. Für die Bestimmung von g wird die Zeitdauer von 40 Schwingungen, $\approx 80 \text{ s}$, mit zehnmahliger Wiederholung gemessen. Für jede Wiederholung wird das Pendel neu ausgelenkt. Die daraus Standardabweichung ist kleiner als $6 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Daraus resultiert ein relativer Fehler der Zeitmessung u_t/t von $< 8 \cdot 10^{-5}$.

Mit den zur Verfügung stehenden Messgeräten sollte der Wert von g mit einem relativen Fehler von besser als $3 \cdot 10^{-4}$, das heißt mit einem absoluten Fehler von besser als $3 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$ bestimmbar sein. Die Ergebnisse der letzten Jahre zeigen, dass diese

Genauigkeit in den meisten Fällen auch erreicht wird. Allerdings liegen die bestimmten Werte von g systematisch, zum Teil um das Mehrfache des Fehlerintervalls, über dem Referenzwert der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt für Berlin Adlershof. Es werden mit hoher Genauigkeit falsche Werte bestimmt, ohne dass die Ursache für diese Abweichungen bekannt ist.

1 Messmethode

Das im Versuch M9 verwendete Reversionspendel (Abbildung 1) ist nur aus einem Material gefertigt. Es besteht aus einem ca. 1.5 m langen Stahlstab mit 16 mm Durchmesser. An diesem sind die zwei Schneiden mit einem Abstand von ca. 0.98 m angebracht. In der Nähe des einen Endes ist das eine Massenstück befestigt. Das zweite Massenstück lässt sich beliebig zwischen den beiden Schneiden positionieren um damit die Lage des Schwerpunktes einzustellen.

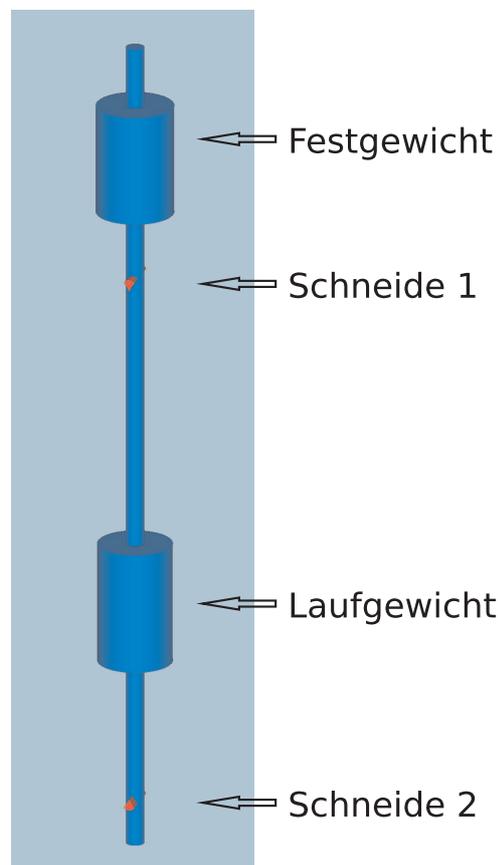


Abbildung 1: Reversionspendel

Im weiteren werden der Schneidenabstand mit l , der Abstand des Schwerpunktes von der Schneide 1 mit a_1 und der Abstand des Schwerpunktes von der Schneide 2 mit a_2 bezeichnet. Damit gilt $l = a_1 + a_2$.

Die Massen der einzelnen Teile wurden so gewählt, dass es zwei Positionen gibt, an denen die Schwingungsdauern für beide Schneiden gleich sind. In Abbildung 2 ist

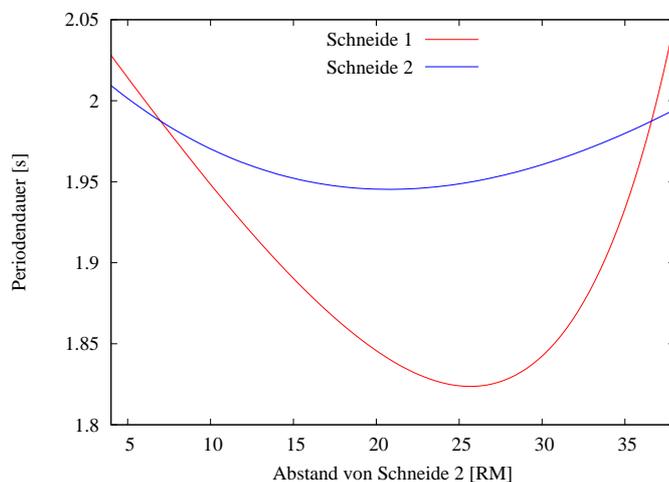


Abbildung 2: Berechnete Abhängigkeit der Periodendauer von der Position des Laufgewichtes, angegeben in Ringmarken.

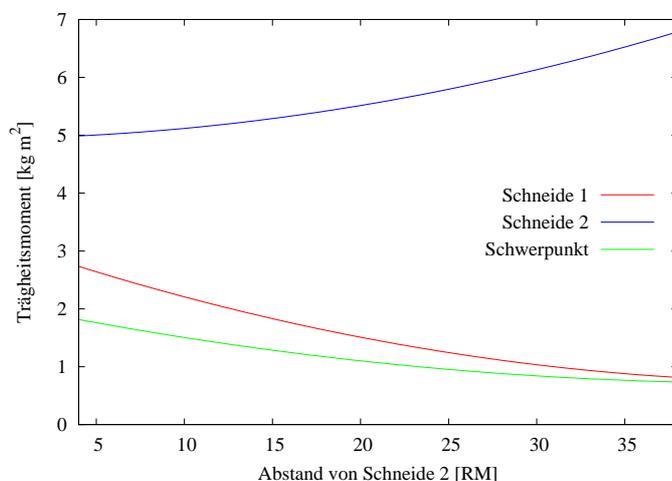


Abbildung 3: Berechnete Abhängigkeit der Trägheitsmomente von der Position des Laufgewichtes, angegeben in Ringmarken.

die mit dem GnuPlot-Skript `Reversionspendel.gnuplot` berechnete Abhängigkeit der Periodendauer von der Stellung des Laufgewichtes für das verwendete Reversionspendel dargestellt. Um die Position des Laufgewichtes zu bestimmen, ist der Pendelstab im Abstand von 20 mm mit eingedrehten Marken versehen. Der Nullpunkt dieser Skala liegt in etwa an der Position der Schneide 2. Damit kann der Abstand der Kante des Laufgewichtes von der Schneide 2 reproduzierbar in Schritten von einer Ringmarke eingestellt werden. Die Schnittpunkte der beiden Kurven liegen etwa bei 7 und etwa bei

36.5 Ringmarken. In der einen Position sind die beiden Massestücke weit auseinander. Wie Abbildung 3 zeigt, ist das daraus resultierende auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment J_S groß. In der anderen Position ist der Abstand der beiden Massestücke klein und das Trägheitsmoment J_S ist geringer. Noch stärker unterscheiden sich die Werte von J_1 . Bei großen Trägheitsmomenten ist die Pendelschwingung stabiler und reagiert weniger empfindlich auf Störungen. Beim ersten Schnittpunkt beträgt der Abstand a_1 der Schneide 1 vom Schwerpunkt $\approx 0.33l$. Dies entspricht etwa dem Wert den F. W. Bessel (1850) angibt. Für den zweiten Schnittpunkt ist dieser Abstand mit $\approx 0.11l$ wesentlich kleiner. Aus diesen Gründen sollte die Einstellung mit dem größeren Abstand der Massestücke verwendet werden.

Mit vertretbarem Aufwand ist es nicht möglich, einen der beiden Schnittpunkte exakt einzustellen. Der genaue Wert der Periodendauer kann nur aus einer möglichst dichten Annäherung an den gesuchten Schnittpunkt bestimmt werden. Dafür gibt es zwei verschiedene Wege.

1.1 Schnittpunktbestimmung durch zweiseitige Annäherung

Hat man auf jeder Seite des Schnittpunktes eine Position des Laufgewichtes gefunden, bei der sich die gemessenen Periodendauern für beide Schneiden nur geringfügig unterscheiden, können anstelle der genauen Funktionen der Kurvenäste die jeweiligen Sekanten für die Berechnung des Schnittpunktes genutzt werden. Dazu werden paarweise die Punkte $(x_1, t_{1,1})$ und $(x_2, t_{2,1})$ sowie $(x_1, t_{1,2})$ und $(x_2, t_{2,2})$ durch Geraden

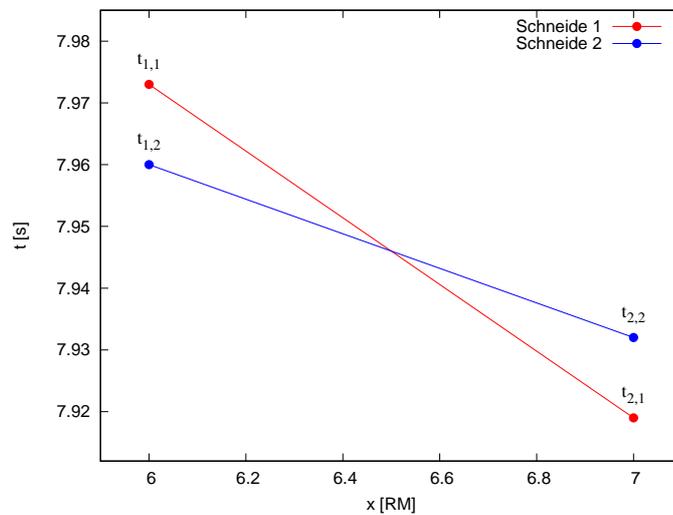


Abbildung 4: Bestimmung von x_s und t_s aus dem Schnittpunkt der beiden Kurven

verbunden. Dabei bezeichnet der erste Index die Position des Laufgewichtes. Der zweite Index steht für die jeweilige Schneide. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist dann

gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 t_s &= \frac{t_{1,1}t_{2,2} - t_{1,2}t_{2,1}}{t_{1,1} - t_{1,2} - t_{2,1} + t_{2,2}} \\
 x_s &= \frac{(t_{2,2} - t_{2,1})x_1 + (t_{1,1} - t_{1,2})x_2}{t_{1,1} - t_{1,2} - t_{2,1} + t_{2,2}} \\
 &= x_1 + \frac{t_{1,1} - t_{1,2}}{t_{1,1} - t_{1,2} - t_{2,1} + t_{2,2}} (x_2 - x_1)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Auf Grund der konvexen Krümmung der beiden Funktion liegt der so berechnete Wert von t_s immer oberhalb des Schnittpunktes der beiden Kurven.

1.2 Schnittpunktsbestimmung aus Schwerpunktlage

F. W. Bessel (1828) hatte gezeigt, dass es nicht notwendig ist, genau gleiche Schwingungszeiten für beide Schneiden experimentell einzustellen¹. Die Schwingungsdauer eines Pendels t , dessen mathematische Länge dem Schneidenabstand entspricht, lässt sich aus den gemessenen Schwingungszeiten um die beiden Schneiden t_1 und t_2 und den entsprechenden Schwerpunktabständen a_1 und a_2 theoretisch berechnen.

$$t^2 = \frac{t_1^2 a_1 - t_2^2 a_2}{a_1 - a_2} \tag{2}$$

Diese Gleichung² ist für die praktische Anwendung nicht sonderlich zweckmäßig, da sie die Bestimmung beider Schwerpunktabstände mit hoher Genauigkeit erfordert. Bei F. W. Bessel (1828) ist auf Seite 98 eine Gleichung für die Länge des einfachen Sekundenpendels λ angegeben, die für ein symmetrisches, inhomogenes Reversionspendel hergeleitet wurde. Die dort schon enthaltenen Korrekturen für den Luftauftrieb und für den Einfluss der mitschwingenden Luftmasse gelten so nicht für ein homogenes, asymmetrisches Reversionspendel. Lässt man in dieser Gleichung auch die sehr kleinen Korrekturen für Verschiebung der Schneiden auf der Unterlage und die Änderung der Luftdichte während der Messung von t_1 und t_2 unberücksichtigt, so ergibt sich daraus für die Schwingungsdauer des Reversionspendels:

$$t^2 = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} + \frac{t_1^2 - t_2^2}{2} \left(\frac{l}{2a_1 - l} \right) \tag{3}$$

wobei a_1 der Abstand des Schwerpunktes von der Schneide 1 und $l = a_1 + a_2$ der Abstand der beiden Schneiden ist. Diese Gleichung lässt sich allgemein für jedes Reversionspendel herleiten³. Für den Fall, dass die Differenz zwischen den Schwingungsdauern der beiden Schneiden ausreichend klein ist, werden an die Genauigkeit, mit der der Schwerpunktabstand a_1 bestimmt werden muss, keine hohen Anforderungen gestellt.

2 Fehlerquellen

2.1 Amplitudenabhängigkeit der Periodendauer

Die Schwingungsgleichung für ein ungedämpftes physikalisches Pendels lautet:

$$J_A \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -m g a \sin \alpha$$

Als Lösung erhält man ein vollständiges elliptisches Integral erster Art:

$$T(\alpha_0) = 4 \sqrt{\frac{J_A}{m g a}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \sin^2 \alpha}}$$

Dieses kann durch eine Reihenentwicklung gelöst werden und führt auf:

$$\begin{aligned} T(\alpha_0) &= T_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \right]^2 \sin^{2m} \left(\frac{\alpha_0}{2} \right) \\ &= T_0 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha_0}{2} \right) + \left(\frac{3}{8} \right)^2 \sin^4 \left(\frac{\alpha_0}{2} \right) + \left(\frac{5}{16} \right)^2 \sin^6 \left(\frac{\alpha_0}{2} \right) + \dots \right\} \\ \text{mit } T_0 &= 2 \pi \sqrt{\frac{J_A}{m g a}} \end{aligned}$$

Die vollständige Herleitung findet man zum Beispiel in R. M. Dreizler, C. S. Lüdde Theoretische Physik Band 1 (2008) (Kapitel 4.2.1, Seiten 162-169). Erfolgt die Messung bei hinreichend kleinen Amplituden kann dieser Ausdruck durch

$$T(\alpha) \approx T_0 \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16} \right) \quad (4)$$

angenähert werden. Bei dem oben abgeschätzten systematischen Restfehler der verwendeten Uhr sollte α_0 kleiner als 0.2 (entspricht etwa 11°) sein, damit der durch die Kleinwinkelnäherung und durch den Abbruchterm entstehende Gesamtfehler den Wert von $6 \cdot 10^{-6}$ nicht übersteigt.

2.2 Dämpfung

Um den Einfluss der Dämpfung auf die Schwingung eines physikalischen Pendels zu beschreiben, müsste die Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\delta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{m g a}{J_A}$$

gelöst werden. δ ist die Abklingkonstante. Im Fall schwacher Dämpfung kann die zeitliche Abnahme der Schwingungsamplitude durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden.

$$\alpha_t = \alpha_0 e^{-\delta t}$$

Aus der am Messplatz 2 beobachteten Abnahme der Amplitude über einen Zeitraum von 90 Minuten ergibt sich, dass δ ungefähr bei $1.7 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-1}$ liegt.

Für derart kleine Werte der Abklingkonstante ist die vollständige Lösung der Schwingungsgleichung nicht notwendig. Die folgende Betrachtungsweise ist ausreichend.

Zum einen gilt für die Kreisfrequenz einer gedämpften harmonischen Schwingung:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Für den vorliegenden Fall sehr kleiner Dämpfung $\delta \ll \omega_0$ ergibt sich daraus für die Periodendauer einer harmonischen Schwingung

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\delta^2 T_0^2}{8 \pi^2} \right)$$

Die sich aus dem bestimmten Wert von δ ergebende relative Änderung von T bleibt unter $2 \cdot 10^{-9}$ und kann daher im weiteren vernachlässigt werden.

Zum anderen ist die Periodendauer eines Pendels aber nach Gleichung 4 von der Schwingungsamplitude abhängig und wird bei zeitlich abnehmender Amplitude eine Funktion der Messzeit t .

$$T(t) = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \alpha_0^2 e^{-2\delta t} \right)$$

Für die über die Zeit von n Perioden gemittelte Periodendauer T_n erhält man ⁴ den Ausdruck:

$$T_n = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \left(\frac{\alpha_0 + \alpha_t}{2} \right)^2 \right) \quad (5)$$

Während der Messzeit von etwa 80 Sekunden (40 Perioden) nimmt die Amplitude um weniger als 2% ab. Benutzt man statt Gleichung 5 den Ausdruck 4, bleibt der daraus resultierende relative Fehler bis zu einer Auslenkung von α_0 kleiner als 0.08 (entspricht etwa 4.6°) unter $6 \cdot 10^{-6}$.

2.3 Luftauftrieb

Die durch das Pendel verdrängte Luft bewirkt eine zusätzliche Kraft. Diese Auftriebskraft ist der wirkenden Schwerkraft entgegengerichtet und greift am Volumenmittelpunkt des Pendels an. Für diese Kraft gilt:

$$F_A = g V \rho_L$$

Beim asymmetrischen, homogenen Pendel fallen Massen- und Volumenmittelpunkt zusammen. Die resultierende Schwingungsgleichung lautet damit:

$$J_a \ddot{\alpha} = -m g a \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_P} \right) \sin \alpha$$

und wir erhalten für die Periodendauer den Ausdruck

$$T(\alpha) \approx T_0 \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16} \right) \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\rho_L}{\rho_P}}} \approx T_0 \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16} + \frac{1}{2} \frac{\rho_L}{\rho_P} \right) \quad (6)$$

Die Luftdichte ρ_L hängt vom Luftdruck p und der Temperatur T ab. Unter Annahme eines idealen Gases kann sie nach der Formel

$$\rho_L = \frac{p}{R_L T}$$

berechnet werden. R_L beschreibt die spezifische Gaskonstante für Luft, die von der Luftfeuchtigkeit abhängig ist. Unter normalen Laborbedingungen, angenommen wurden 23°C , 1013 hPa und 60% relative Luftfeuchtigkeit, beträgt die Luftdichte $1,175 \text{ kg/m}^3$. Die im Praktikum verwendeten Pendel sind bis auf die Schneiden aus Baustahl gefertigt, dessen Dichte je nach Kohlenstoffgehalt zwischen 7830 kg/m^3 und 7870 kg/m^3 variiert.

2.4 Schneidenform

Bisher wurde davon ausgegangen, dass das Pendel um eine Achse schwingt, die durch den Auflagepunkt der Schneide verläuft und durch die Schnittlinie der beiden Seitenflächen der prismenförmigen Schneide definiert wird. In der Praxis ist das nicht der Fall. Die Schneide ist mehr oder weniger verrundet. Den Einfluss des Abrollens der Schneide auf der Unterlage auf die Schwingungszeit des Pendels hat schon von dem französischer Mathematiker Laplace ⁵ erkannt. Sehr detailliert wurde dieser Effekt von F. W. Bessel (1828) in den Paragraphen 25 - 27 und in der Beilage IX untersucht. Dabei geht er davon aus, dass sich die Schneidenform durch einen Kegelschnitt beschreiben

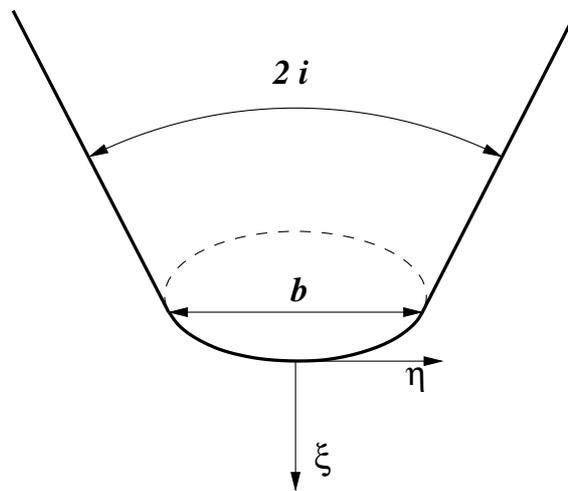


Abbildung 5: Form der Schneide

lässt, der die beiden Seitenflächen tangiert. Der Abstand der beiden Berührungspunkte wird mit b und der Winkel zwischen den beiden Seitenflächen mit $2i$ bezeichnet. In dem fest mit der Schneide verbundenen Koordinatensystem (ξ, η) , dessen Ursprung sich im Auflagepunkt des Pendels in Ruhelage befindet, kann die Schneidenform durch die Scheitelpunktgleichung des Kegelschnittes beschrieben werden.

$$V = 2p\xi \pm \frac{p}{a_\xi} \xi^2 + \eta^2 = 0 \quad + \text{Ellipse, - Hyperbel}$$

$$p = \frac{a_\eta^2}{a_\xi}$$

Dabei bedeutet a_ξ die halbe Achse in ξ und a_η die halbe Achse in η . Die von F. W. Bessel (1828) verwendete numerische Exzentrizität

$$\varepsilon = 1 \mp \frac{p}{a_\xi} \quad - \text{Ellipse, + Hyperbel}$$

weicht von der heute üblichen Definition ab. Sie erlaubt auch Werte $\varepsilon < 0$ für Ellipsen $a_\eta > a_\xi$. Damit lassen sich alle möglichen Schneidenformen über den Parameter ε

definieren. Der Größe des Formparameter ε bestimmt den Wert des Faktors q , der zur Beschreibung des Einflusses der Schneidenform auf die gemessene Periodendauer benötigt wird.

$\varepsilon = 1/\cos^2 i$	Winkelspitze (entartete Hyperbel)	$q = 0$
$1/\cos^2 i > \varepsilon > 1$	Hyperbel	
$\varepsilon = 1$	Parabel	
$1 > \varepsilon > 0$	Ellipse mit langer Achse $\parallel \xi$	
$\varepsilon = 0$	Kreis	$q = \frac{1}{2 \cos i}$
$0 > \varepsilon > -\infty$	Ellipse mit kurzer Achse $\parallel \xi$	
$\varepsilon = -\infty$	ebene Abstumpfung	$q = \frac{2}{\pi \sin \alpha_0}$ für $\alpha_0 > 0$

Dieser hängt außerdem von der Auslenkung α_0 des schwingenden Pendels ab. Für $\alpha_0 \rightarrow 0$ ergibt sich der Grenzwert

$$q = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon \cos^2 i}}{2 \cos i}$$

Wie die von F. W. Bessel (1828) berechneten Tabellen ⁶ zeigen, kann q für abgestumpfte Schneiden ($\varepsilon \rightarrow -\infty$) sehr große Werte annehmen, die zu erheblichen Fehlern bei der Bestimmung der Erdbeschleunigung führen werden. Als oberer Grenzwert kann

$$q = \frac{2}{\pi \sin \alpha_0}$$

angesehen werden.

Für die Länge l_m eines mathematischen Pendels, das mit der gleichen Periodendauer wie das Schneidenpendel schwingt, hat F. W. Bessel (1828) in der Beilage IX den Zusammenhang

$$l_m = l_r \left(1 - \frac{b q(\varepsilon, \alpha_0)}{a} \right)$$

hergeleitet. Hierbei bedeutet l_r die Länge eines physikalischen Pendels mit der gleichen Periodendauer wie das Schneidenpendel, wenn dieses um den Auflagepunkt der Schneide schwingen würde. a ist der Abstand des Schwerpunktes von der Schneide. Sowohl l_m als auch l_r sind unbekannt. Für den Fall, dass die gemessene Periodendauern für beide Schneiden gleich sind, gilt:

$$\begin{aligned} l_c &= l_{m1} = l_{m2} \\ &= l_{r1} \left(1 - \frac{b_1 q_1}{a_1} \right) \quad \text{mit} \quad l_{r1} = \frac{\mu + a_1^2}{a_1} \\ &= l_{r2} \left(1 - \frac{b_2 q_2}{a_2} \right) \quad \text{mit} \quad l_{r2} = \frac{\mu + a_2^2}{a_2} \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich die unbekannte Größe $\mu = J_s/m$ eliminieren. Unter Vernachlässigung kleiner Terme ⁷ erhält man den Ausdruck:

$$l_c = a_1 + a_2 - \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} (b_1 q_1 - b_2 q_2)$$

Der Fehler bei der Bestimmung von g resultiert aus der unterschiedlichen Abnutzung der Schneidenkanten. Nur für den Fall, dass die Form beider Schneiden identisch ist

($b_2 = b_1$ und $q_2(\alpha_0) = q_1(\alpha_0)$), hebt sich der Einfluss der Schneidenform auf und es gilt $l_c = a_1 + a_2$. Dies kann durch die Verwendung nur einer festen Schneide als Auflage erreicht werden. Das Pendel ist dazu mit zwei ebenen, zueinander parallelen Flächen auszustatten. Der Abstand dieser Schwingungsflächen bestimmt dann den Wert von $l = a_1 + a_2$.

Weitestgehend eliminieren lässt sich der Einfluss der Schneidenform auch durch Vertauschen der Schneiden (F. W. Bessel (1828)). Dazu wird zuerst die Periodendauer T_u nach Gleichung 3 bestimmt. Nach Vertauschen der Schneiden wird in der gleichen Weise T_v ermittelt. Aus

$$\frac{T_u^2 + T_v^2}{2} = \frac{4\pi^2}{g} \left(\frac{l_{cu} + l_{cv}}{2} \right) = \frac{4\pi^2}{g} (a_1 + a_2)$$

kann g unabhängig von der Form der Schneiden bestimmt werden.

Welchen Einfluss die Schneidenform hat, kann man an der Veränderung der Amplitudenabhängigkeit der Periodendauer erkennen. Aus dem Ausdruck für l_m folgt unter der Annahme sehr stark abgestumpfter Schneiden ($\varepsilon \rightarrow -\infty$) für die Amplitudenabhängigkeit der Periodendauer $T(\alpha_0)$ als oberer Grenzwert die Korrektur

$$\begin{aligned} T(\alpha_0)_c &= T(\alpha_0) * \sqrt{1 - \frac{bq}{a}} \\ &\approx T_0 \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16} \right) \left(1 - \frac{b}{\pi a \alpha_0} \right) \\ &\approx T_0 \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16} - \frac{b}{\pi a \alpha_0} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

In Abbildung 6 (mit dem GnuPlot-Skript `Amplitudenabhaengigkeit.gnuplot` berechnet) ist die gemessene Abhängigkeit der Periodendauer von der Amplitude zusammen mit einem Fit nach Gleichung 4 sowie einem Fit nach Gleichung 7 dargestellt. Die Auswirkungen der Scheidenform auf die Periodendauer ist hier sehr deutlich zu erkennen.

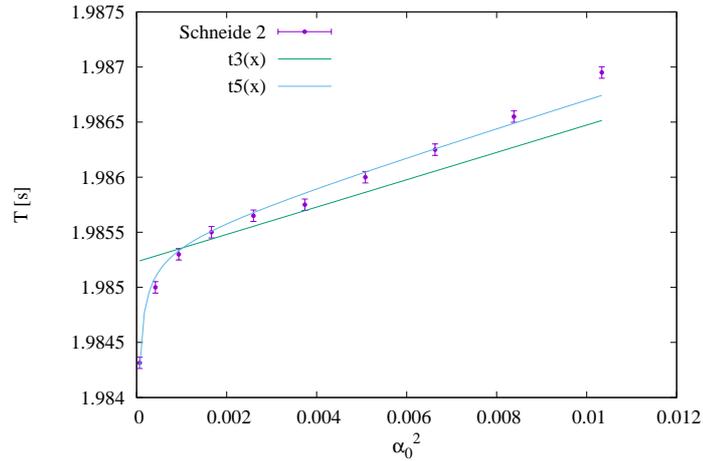


Abbildung 6: Auswirkung der Schneidenform auf die Periodendauer

Aus dem Fit folgt bei einem Schwerpunktsabstand a_2 von etwa 620 mm ein Wert für b , der Breite der Abflachung der Schneide, von etwa $11 \mu m$.

Liegt ε in der Nähe von 0, ist q nur noch sehr wenig oder im Falle einer zylindrischen Schneide $\varepsilon = 0$ gar nicht von der Amplitude α_0 abhängig. In diesem Fall gilt $bq = r$, wobei r der Radius der Schneide ist. Da im allgemeinen keine Informationen über die genaue Form der beiden Schneiden vorliegen und man davon ausgehen muss, dass die Abstumpfung der beiden Schneiden unterschiedlich ist, kann dieser Fehler im Nachgang nicht korrigiert werden.

Die gemessenen Amplitudenabhängigkeiten zeigen, dass die Schneiden an allen vier im Praktikum genutzten Reversionspendeln deutlich abgeflacht sind. In diesem Fall ist bei den üblicherweise verwendeten Auslenkungen von weniger als 0.5 Grad der Einfluss der unterschiedlichen Form der beiden Schneiden besonders stark bemerkbar. Ohne Veränderungen an den Pendeln vorzunehmen, lässt sich er sich durch die Messung bei größeren Amplituden entsprechend Gleichung 7 verringern. Werden die Messung mit einer Amplitude von 2.5 Grad durchgeführt, verringert sich der Einfluss der Abstumpfung um etwa den Faktor 5.

2.5 Mitschwingen der angrenzenden Luft

In Folge der inneren Reibung in der aerodynamischen Grenzschicht haftet ein kleiner Teil der angrenzenden Luftmasse an der Pendeloberfläche. Dadurch vergrößert sich das Trägheitsmoment des Pendels um einen kleinen unbekanntem Betrag. Diesen Effekt hat schon F. W. Bessel (1828) ausführlich untersucht. Bei einem homogenen asymmetrischen Pendel sind die zusätzlichen Trägheitsmomente für beide Schneiden unterschiedlich. Ihr Einfluss kann sich daher nur teilweise kompensieren. Bei einem inhomogenen, aber in der Form symmetrischen Pendel ergibt sich für beide Schneiden das gleiche zusätzliche Trägheitsmoment. Bei der Methode der Schnittpunktsbestimmung verschwindet dieses zusammen mit dem zusätzlichen Trägheitsmoment J^* (siehe hierzu Herleitung der Gleichung 3).

2.6 Biegung des Pendels

Bisher wurde davon ausgegangen, dass das Reversionspendel ein starrer Körper ist. Spätestens bei der Durchführung der Schwerpunktsbestimmung wird deutlich, dass diese Annahme nicht erfüllt ist. Wenn das Pendel genau unter dem Schwerpunkt unterstützt wird, ist die Durchbiegung des Pendelstabes unter dem Einfluss der Gewichtskraft deutlich sichtbar. Eine Simulation (Abbildung 7) mittels der finite Elemente



Abbildung 7: FEM-Modell des im Schwerpunkt unterstützten Reversionspendel. Die Durchbiegung von etwa mehr als 3 mm ist um den Faktor 10 überhöht gezeichnet.

Methode (Programmpaket CalculiX (2016)) ergab, dass die Enden des Pendels etwa 3.3 mm tiefer liegen als der Unterstützungspunkt. F. R. Helmert (1898) hat gezeigt, dass durch die Elastizität des Reversionspendels systematischen zu große Werte für

die Länge des einfachen Sekundenpendels und damit zu große Werte für g bestimmt werden. Bei dem von ihm detailliert untersuchten stark biegsamen Meterpendel betrug die experimentell bestimmte relative Abweichung $\approx +3,5 \cdot 10^{-4}$.

2.7 Mitschwingen des Stativs

Pendel und Pendelaufhängung bilden ein Gesamtsystem. Beim Schwingen wirkt auf die Auflageflächen eine sich periodisch ändernde Kraft, die das Stativ zum Mitschwingen anregt.

3 Schlussfolgerungen

Insgesamt ergibt sich, dass die Konstruktion der im Versuch M9 genutzten, wenigstens 45 Jahre alten Reversionspendel den Möglichkeiten der heute zur Verfügung gestellten Zeit- und Längenmessgeräten nicht mehr entsprechen.

Die störenden Einflüsse der umgebenden Luft können durch ein symmetrisch geformtes, inhomogenes Pendel, wie es bereits F. W. Bessel (1828) vorgeschlagen hat, vollständig vermieden werden. Durch Verwendung von am Pendel angebrachten Schwingungsflächen und nur einer festen Schneide, auf der das Pendel schwingt, kompensiert sich weitestgehend die Auswirkung der Schneidenform auf das Endergebnis. Wie ein solches, für Lehrzwecke verwendbares Reversionspendel, aussehen kann wurde, von D. Candela u. a. (2001) ausführlich beschrieben. Dabei wird auch auf eine ausreichende Steifheit der Pendelaufhängung geachtet. Die mit diesem Pendel erreichte Messgenauigkeit (Abweichung vom Referenzwert des Messortes) bei der Bestimmung von g liegt unter $1 \cdot 10^{-3} m/s^2$.

4 Hinweise zur Versuchsdurchführung

Vor Beginn der Zeitmessungen muss die Ausrichtung des Lasers an der Lichtschranke kontrolliert werden. Das Starten und Stoppen der Uhr, das durch die Freigabe der Lichtschranke erfolgt, sollte in unmittelbarer Nähe des Nulldurchganges des Pendels erfolgen. Der Laserspot ist daher so eingestellt, dass er die Pendelstange an der wandseitigen Seite gerade streift und die eine Hälfte des Lichtflecks noch auf der Eintritts-

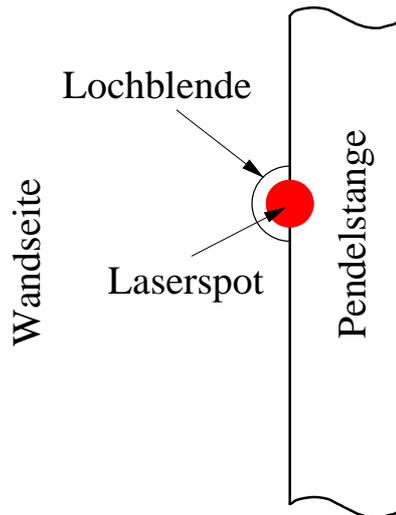


Abbildung 8: Justage der Lichtschranke

blende der Photodiode zu sehen ist. Sollte dies nicht der Fall sein, ist die Lichtschranke mit Hilfe des Versuchsbetreibers neu einzustellen. Danach kann mit den Messungen begonnen werden.

1. Übersichtsmessung

Für die Übersichtsmessung wird das Pendel mit der Schneide 2 eingehangen. Das Laufgewicht wird so nahe wie möglich an die Schneide 2 herangeschoben und mit seiner Oberkante auf der nächsten Ringmarke ausgerichtet und fixiert. Es wird die Zeit für 4 Perioden für Schneide 2 und nach Umdrehen des Pendel für Schneide 1 mit einer Amplitude von ca. 45 mm gemessen. Damit die richtige Seite der Pendelstange die Zeitmessung bestimmt, muss die Uhr immer in der Nähe des wandseitigen Umkehrpunktes gestartet werden. Nach der erfolgten Messung der beiden Zeiten wird das Pendel wieder mit der Schneide 2 aufgehängt und danach das Laufgewicht in Richtung Schneide 1 um eine Ringmarke verschoben. Danach werden die Zeiten für beide Schneiden erneut gemessen. Dieser Ablauf wird solange wiederholt, bis sich das Vorzeichen der Differenz $t_1 - t_2$ ändert. Der gesuchte Schnittpunkt der beide Kurven muss zwischen der vorhergehenden und der momentanen Position des Laufgewichtes liegen. An dieser Stelle wird die Übersichtsmessung beendet. Die genaue Lage des Schnittpunktes kann mit der

Gleichung

$$t_s = \frac{t_{1,1}t_{2,2} - t_{1,2}t_{2,1}}{t_{1,1} - t_{1,2} - t_{2,1} + t_{2,2}}$$

$$x_s = x_1 + \frac{t_{11} - t_{12}}{t_{1,1} - t_{1,2} - t_{2,1} + t_{2,2}} (x_2 - x_1)$$

berechnete werden. Dabei bezeichnet der erste Index die Position des Laufgewichtes. Der zweite Index steht für die jeweilige Schneide. Da der Ringmarkenabstand mit 20 mm bekannt ist, kann das Laufgewicht auf etwa ± 0.5 mm genau fixiert werden. Diese Position wird im weiteren Verlauf des Versuchs nicht mehr verändert. Die für beide Schneiden gemessenen Zeiten (4 Perioden) sollten sich um weniger als 20 ms unterscheiden. Ist das nicht der Fall sollte die Berechnung von x_s und die Positionierung des Laufgewichtes nochmals überprüft werden.

2. Präzisionsmessung

Für die Präzisionsmessung wird die Zeit für 40 Perioden bei einer Auslenkung von 45 mm für beiden Schneiden gemessen. Diese Messung ist jeweils 10 mal zu wiederholen. Damit alle zufälligen Störgrößen erfasst werden, ist nach jeder Messung das Pendel umzudrehen, sodass die Zeiten für die Schneiden 1 und 2 wechselweise gemessen werden. Aus den Mittelwerten kann mit der Gleichung

$$t^2 = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} + \frac{t_1^2 - t_2^2}{2} \left(\frac{l}{2a_1 - l} \right)$$

die Zeit für 40 Schwingungen am Schnittpunkt berechnet werden. Durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes erhält man aus den Vertrauensbereichen den zufälligen Fehler der so bestimmten Schwingungszeit am Schnittpunkt. Da der systematische Restfehler der verwendeten Uhr sich auf alle Zeitmessungen in gleicher Weise auswirkt, ist dieser nach Größtfehlerabschätzung mit dem bestimmten zufälligen Fehler zu verknüpfen. Aus der Zeit für 40 Schwingungen und deren Fehler ergibt sich die Periodendauer und deren Fehler.

3. Schneidenabstand und Schwerpunkt

Der Schneidenabstand wird mit Hilfe eines Anbaumessschiebers gemessen. Um zufällige Störeinflüsse zu berücksichtigen ist diese Messung 10 mal zu wiederholen und daraus Mittelwert und Vertrauensbereich zu bestimmen. Alle notwendigen Angaben sind am Messplatz angegeben.

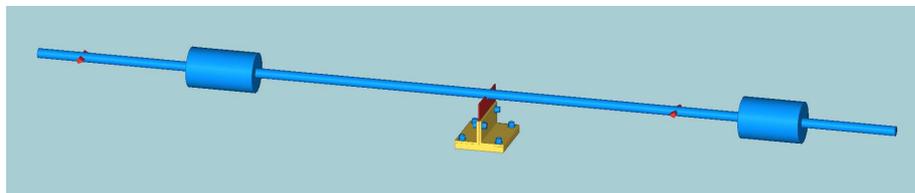


Abbildung 9: Bestimmung des Schwerpunktes

Der Abstand des Schwerpunktes von der Schneide 1 wird durch Ausbalancieren des Pendels auf einem vertikalen Stahlblech bestimmt. Die Dicke dieses Bleches beträgt 1 mm. Der Abstand zwischen der Schneide 1 und der Mitte des

Stützbleches wird mit einem Stahllineal gemessen. Zur Abschätzung der Messgenauigkeit können hier auch mehrere Wiederholungen durchgeführt werden. Diese sind jedoch nur dann aussagekräftig, wenn das Pendel jedesmal neu ausbalanciert wird.

4. Amplitudenabhängigkeit

Für eine der beiden Schneiden ist die Amplitudenabhängigkeit der Zeit für 40 Schwingungen aufzunehmen. Die Vorwahleinstellung ist entsprechend der jeweiligen Amplitude vorzunehmen. Bei Auslenkungen kleiner als etwa 16 mm (Durchmesser der Pendelstange) wird die Lichtschranke nur einmal pro Schwingung freigegeben. In diesem Fall ist die Vorwahl auf die halbe Periodenanzahl 20 einzustellen. Es sollten jeweils wenigstens 11 verschiedene Auslenkungen zwischen 5 und 100 mm genutzt werden. Bei der Auswertung unter Anwendung der Gleichungen

$$T(\alpha_0) \approx T_0 \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16} \right)$$

und

$$T(\alpha_0)_c \approx T_0 \left(\left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16} - \frac{b}{\pi a \alpha_0} \right) \right)$$

sollte zusätzlich das Ergebnisse der Präzisionsmessung als weiterer Datenpunkt einbezogen werden. Unbekannt und daher Fitparameter ist im ersten Fall der Wert von T_0 . Bei der zweiten Abhängigkeit ist der Wert der Schneidenbreite b ein weiterer Fitparameter für die Anpassung der Funktion an die Messpunkte. Als Startwert kann von $10\mu\text{m}$ ausgegangen werden. Der Abstand a der betrachteten Schneide zum Schwerpunkt ist durch die zuvor durchgeführten Messungen von a_1 und l bekannt.

In der Darstellung von $T = f(\alpha^2)$ wird der Unterschied zwischen beiden verschiedenen Funktionen am deutlichsten sichtbar.

Anmerkungen

¹ Nach F. Kühnen, Ph. Furtwängler (1906), Seite X wird diese Erkenntnis Bohnenberger zugeschrieben. Der dort angegebene Quelle (J. G. F. Bohnenberger (1811)) kann diese Aussage jedoch nicht entnommen werden. Auch in J. G. F. Bohnenberger (1827) findet sich kein Hinweis darauf. F. W. Bessel (1828) (Seite 97) geht bei seinen Betrachtungen davon aus, dass ein bewegliches Gewicht für ein Pendel mit reziproken Achsen nicht erforderlich ist, sondern es ausreicht, wenn die Schwingungszeiten um beide Schneiden nahezu gleich gemacht werden.

² Diese Gleichung findet man ohne Herleitung oder Quellenangabe bei F. Kühnen, Ph. Furtwängler (1906) auf Seite X und bei F. R. Helmert (1898) auf Seite 8 (Gleichung 24) als Ausgangspunkt weiterer Überlegungen. Nach J. H. Poynting and J. J. Thomson (1902) (Seite 15) geht dieser Ausdruck auf F. W. Bessel (1828) zurück, auch wenn er sich dort nicht direkt findet, sondern nur die Überlegungen, die zur Herleitung notwendig sind, angegeben werden.

³ Für den Fall dass die Periodendauern für beide Schneiden gleich sind, gilt

$$\frac{J_s}{m a_1} + a_1 = \frac{J_s}{m a_2} + a_2$$

Daraus folgt für das Schwerpunktträgheitsmoment J_s :

$$J_s = m a_1 a_2$$

Sind die beiden Periodendauern t_1 und t_2 nicht exakt gleich, kann man für J_s

$$J_s = m a_1 a_2 + J^*$$

schreiben, wobei das zusätzliche Trägheitsmoment J^* bei kleiner Differenz der Periodendauern ebenfalls sehr klein ist. Aus der Lösung der Schwingungsgleichung für das physikalische Pendel

$$t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{g m a_1}}$$

folgt mit

$$J_1 = m a_1 a_2 + J^* + m a_1^2 \quad \text{und} \quad a_2 = l - a_1$$

die Beziehung

$$4\pi^2(m a_1 l + J^*) = t_1^2 g m a_1$$

und daraus:

$$\frac{t_1^2 g}{4 \pi^2} = l + \frac{J^*}{m a_1}$$

Analog gilt für die 2. Schneide:

$$\frac{t_2^2 g}{4 \pi^2} = l + \frac{J^*}{m a_2}$$

Damit lässt sich die unbekannte Größe J^* aus den Gleichungen eliminieren.

$$J^* = \left(\frac{t_1^2 g}{4 \pi^2} - l \right) m a_1 = \left(\frac{t_2^2 g}{4 \pi^2} - l \right) m a_2$$

und erhält den Ausdruck:

$$\frac{g}{4 \pi^2} (t_1^2 a_1 - t_2^2 a_2) = l (a_1 - a_2) \quad (*)$$

Schreibt man für den Mittelwert \bar{t} und die Differenz δ :

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{t_1 - t_2}{2}$$

und ersetzt damit die Größen t_1 und t_2 durch

$$t_1 = \bar{t} + \delta \quad \text{und} \quad t_2 = \bar{t} - \delta$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} l (a_1 - a_2) &= \frac{g}{4 \pi^2} [(\bar{t}^2 + 2 \bar{t} \delta + \delta^2) a_1 - (\bar{t}^2 - 2 \bar{t} \delta + \delta^2) a_2] \\ &= \frac{g}{4 \pi^2} [(\bar{t}^2 + \delta^2) (a_1 - a_2) + 2 \bar{t} \delta (a_1 + a_2)] \end{aligned}$$

mit $a_1 + a_2 = l$ ergibt sich daraus der exakte Ausdruck für die Periodendauer des Reversionspendels:

$$t^2 = \frac{4 \pi^2}{g} l = \bar{t}^2 + \delta^2 + 2 \bar{t} \delta \left(\frac{l}{2 a_1 - l} \right)$$

Diese Herleitung findet man in sehr kompakter Form in A. H. Cook (1965) auf Seite 89. Geht man wieder auf die ursprünglichen Größen t_1 und t_2 zurück, so erhält man den von F. W. Bessel (1828) angegebenen Ausdruck:

$$t^2 = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2} + \frac{t_1^2 - t_2^2}{2} \left(\frac{l}{2 a_1 - l} \right)$$

Der Ausdruck (*) fährt auch direkt auf die Gleichung 2:

$$t^2 = \frac{4 \pi^2}{g} l = \frac{t_1^2 a_1 - t_2^2 a_2}{a_1 - a_2}$$

Beide Gleichung werden auch in J. H. Poynting and J. J. Thomson (1902) auf Seite 15 unter Verweis auf F. W. Bessel (1828) hergeleitet.

⁴ Die folgende Herleitung ist zum Teil A. H. Cook (1965) (Seite 89) entnommen. Aus der Zeitabhängigkeit der Periodendauer folgt für die Kreisfrequenz:

$$\omega(t) = \frac{2\pi}{T(t)} = \frac{2\pi}{T_0} \left(1 - \frac{1}{16} \alpha_0^2 e^{-2\delta t} \right)$$

Der Phasenwinkel ϕ nach der Zeit t ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_0^t \frac{2\pi}{T_0} \left(1 - \frac{1}{16} \alpha_0^2 e^{-2\delta t}\right) \\ &= \frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{\alpha_0^2}{32\delta} (1 - e^{-2\delta t}) \right]\end{aligned}$$

Wird dieser Phasenwinkel einem ganzzahligen Vielfachen von 2π gleichgesetzt,

$$\phi(t) = 2\pi n$$

so erhält man für die über n Perioden gemittelte Periodendauer T_n

$$\begin{aligned}T_n &= \frac{t}{n} = \frac{2\pi t}{\phi(t)} \\ &= T_0 \frac{t}{t - \frac{\alpha_0^2}{32\delta} (1 - e^{-2\delta t})} \\ &= T_0 \left[1 + \frac{\alpha_0^2}{32\delta t} (1 - e^{-2\delta t}) \right]\end{aligned}$$

da

$$e^{-2\delta t} = \left(\frac{\alpha_t}{\alpha_0}\right)^2 \quad \text{und} \quad \delta t = \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_t}$$

gilt, ergibt sich

$$T_n = T_0 \left(1 + \frac{\alpha_0^2 - \alpha_t^2}{32 \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_t}} \right) \quad (*)$$

Abweichend von A. H. Cook (1965) (Seite 89) wird

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_0 + \alpha_t}{2} \quad \text{und} \quad \Delta\alpha = \frac{\alpha_0 - \alpha_t}{2}$$

und somit

$$\alpha_0 = \bar{\alpha} + \Delta\alpha \quad \text{und} \quad \alpha_t = \bar{\alpha} - \Delta\alpha$$

gesetzt. Damit ergibt sich

$$\ln \frac{\alpha_0}{\alpha_t} = \ln \frac{\bar{\alpha} + \Delta\alpha}{\bar{\alpha} - \Delta\alpha} = \ln \frac{1 + \Delta\alpha/\bar{\alpha}}{1 - \Delta\alpha/\bar{\alpha}}$$

Durch Anwendung der Reihenentwicklung

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \dots \quad \text{mit} \quad x = \frac{\Delta\alpha}{\bar{\alpha}} = \frac{\alpha_0 - \alpha_t}{\alpha_0 + \alpha_t}$$

und Abbruch vor dem Term dritter Ordnung ergibt sich

$$\ln \frac{\alpha_0}{\alpha_t} \approx 2 \frac{\alpha_0 - \alpha_t}{\alpha_0 + \alpha_t}$$

und damit

$$\begin{aligned} T_n &= T_0 \left(1 + \frac{(\alpha_0 + \alpha_t)(\alpha_0 - \alpha_t)(\alpha_0 + \alpha_t)}{64(\alpha_0 - \alpha_t)} \right) \\ &= T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \left(\frac{\alpha_0 + \alpha_t}{2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

A. H. Cook (1965) (Seite 89) verwendet für $\ln(\alpha_0/\alpha_t)$ die Reihenentwicklung

$$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 + \dots$$

und bricht diese vor dem Term zweiter Ordnung ab. Damit wird

$$\ln \frac{\alpha_0}{\alpha_t} \approx \frac{\alpha_0}{\alpha_t} - 1 = \frac{\alpha_0 - \alpha_t}{\alpha_t}$$

woraus die durch den früheren Abbruch der Reihenentwicklung ungenauere Abschätzung

$$\begin{aligned} T_n &= T_0 \left(1 + \frac{(\alpha_0 + \alpha_t)(\alpha_0 - \alpha_t)\alpha_t}{32(\alpha_0 - \alpha_t)} \right) \\ &= T_0 \left(1 + \frac{(\alpha_0 + \alpha_t)\alpha_t}{32} \right) \end{aligned}$$

folgt.

F. Kühnen, Ph. Furtwängler (1906) nutzen die Amplitude α_m in der Mitte der Beobachtungszeit $t_m = t/2$ zur Berücksichtigung der Dämpfung bei der Amplitudenreduktion. Aus der auf Seite 35 angegebenen Gleichung 7

$$T_0 = T \left(1 - \frac{\alpha_m^2}{32\delta} \frac{e^{2\delta t_m} - e^{-2\delta t_m}}{2t_m} \right)$$

folgt mit

$$\alpha_m = \alpha_0 e^{-\delta t_m} \quad \text{und.} \quad \alpha_t = \alpha_0 e^{-\delta t} \quad \text{bzw.} \quad \delta t = \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_t}$$

sofort der Ausdruck (*). Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktionen des Terms

$$e^x - e^{-x} = 2 \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)$$

und Abbruch vor der fünften Ordnung führt auf die von F. Kühnen, Ph. Furtwängler (1906) angegebene Reduktionsformel

$$T_0 = T \left(1 - \frac{\alpha_m^2}{16} \left(1 + \frac{2}{3} \delta^2 t_m^2 \right) \right)$$

⁵ Im Anhang von H. Kater (1818) ist eine Zusammenfassung der Argumentation von Laplace enthalten.

⁶ Die folgende Tabelle ist F. W. Bessel (1828) Seite 71/72 entnommen.

Winkel $i = 45^\circ$					
ε	Kegelschnitt	a_ξ/a_ν	Werte von $q(\varepsilon, \alpha_0)$		
			$\alpha_0 = 0$	$\alpha_0 = 1^\circ$	$\alpha_0 = 2^\circ$
+	2	Hyperbel	0.00	0.00	0.00
+	1	Parabel	0.50	0.50	0.50
	0	Kreis	0.71	0.71	0.71
-	10	Ellipse	1.73	1.73	1.72
-	100		5.05	4.99	4.84
-	1000		15.83	14.30	11.58
-	10000		50.00	28.28	16.68
-	100000		158.11	34.94	18.00
-	∞	Ebene	∞	36.48	18.24

Winkel $i = 60^\circ$					
ε	Kegelschnitt	a_ξ/a_ν	Werte von $q(\varepsilon, \alpha_0)$		
			$\alpha_0 = 0$	$\alpha_0 = 1^\circ$	$\alpha_0 = 2^\circ$
+	2	Hyperbel	0.00	0.00	0.00
+	1	Parabel	0.87	0.87	0.87
	0	Kreis	1.00	1.00	1.00
-	10	Ellipse	1.87	1.87	1.86
-	100		5.10	5.04	4.88
-	1000		15.84	14.32	11.59
-	10000		50.01	28.38	16.68
-	100000		158.12	34.94	18.00
-	∞	Ebene	∞	36.48	18.24

Der Winkel der im Praktikum genutzten Schneiden beträgt $i = 30^\circ$.

⁷ Aus dem Umstellen beider Gleichungen nach μ folgt:

$$\mu = \frac{l_c a_1^2}{a_1 - b_1 q_1} - a_1^2 = \frac{l_c a_2^2}{a_2 - b_2 q_2} - a_2^2$$

Damit erhält man für l_c

$$\begin{aligned} l_c &= \frac{(b_1 q_1 - a_1)(b_2 q_2 - a_2)(a_1^2 - a_2^2)}{a_2^2(b_1 q_1 - a_1) - a_1^2(b_2 q_2 - a_2)} \\ &= (a_1 + a_2) \frac{(a_1 - a_2)(a_1 a_2 - a_1 b_2 q_2 - a_2 b_1 q_1) + (a_1 - a_2) b_1 q_1 b_2 q_2}{a_2^2 b_1 q_1 - a_1 a_2^2 - a_1^2 b_2 q_2 + a_1^2 a_2} \\ &= (a_1 + a_2) \frac{a_2^2 b_1 q_1 - a_1 a_2^2 - a_1^2 b_2 q_2 + a_1^2 a_2 + a_1 a_2 b_2 q_2 - a_1 a_2 b_1 q_1 + (a_1 - a_2) b_1 q_1 b_2 q_2}{a_2^2 b_1 q_1 - a_1 a_2^2 - a_1^2 b_2 q_2 + a_1^2 a_2} \\ &= (a_1 + a_2) \left(1 - \frac{a_1 a_2 (b_1 q_1 - b_2 q_2)}{a_1 a_2 \left(a_1 - a_2 + \frac{a_2}{a_1} b_1 q_1 - \frac{a_1}{a_2} b_2 q_2 \right)} + \frac{(a_1 - a_2) b_1 q_1 b_2 q_2}{a_1 a_2 \left(a_1 - a_2 + \frac{a_2}{a_1} b_1 q_1 - \frac{a_1}{a_2} b_2 q_2 \right)} \right) \end{aligned}$$

nach Vernachlässigung des kleinen Terms $b_1 q_1 b_2 q_2$

und der kleinen Terme in $\left(1 - \frac{b_1 q_1}{a_1} \right)$ und $\left(1 - \frac{b_2 q_2}{a_2} \right)$

$$= (a_1 + a_2) - \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} (b_1 q_1 - b_2 q_2)$$

für den Fall, dass $b_1 = b_2 = b$ und $q_1 = q_2 = q$ gilt, geht nur noch der von $(bq)^2$ abhängige Term ein, der verschwindend gering ist.

$$l_c = (a_1 + a_2) \left(1 + \frac{(a_1 - a_2)(bq)^2}{a_1 a_2 \left(a_1 - a_2 + \frac{a_2}{a_1} b q - \frac{a_1}{a_2} b q \right)} \right) \approx (a_1 + a_2) \left(1 + \frac{(bq)^2}{a_1 a_2} \right) \approx a_1 + a_2$$

5 Anlagen

5.1 Skript Reversionspendel.gnuplot

```
# asymmetrisches homogenes rotationssymmetrisches Reversionpendel
# bestehend aus inem Stab mit einem festen und einem verschiebbaren Gewicht
# und zwei Schneiden
# Achse liegt bei x=0, y=0 parrallel zur z-Achse
# Koordinatenursprung liegt in der Schneide 1
# z-Positionen beziehen sich auf den jeweiligen Schwerpunkt
# alle Längen in mm, alle Massen in g, alle Zeiten in s
#
# Dichten in g/mm^3
rhoFe = 7.86E-3
# Abmessungen
Schneidenabstand = 981.8
zSchneide1 = 0
zSchneide2 = -Schneidenabstand
#
dStab = 16
lStab = 1432
# oberes Ende des Pendelstabes 373 mm über Schneide 1
zStab = 373 - lStab/2
#
dFestgewicht = 68.5
lFestgewicht= 100
zFestgewicht = 118 + lFestgewicht/2
#
dLaufgewicht = 66
lLaufgewicht = 110
zminLaufgewicht = zSchneide2 + 60 + lLaufgewicht/2;
zmaxLaufgewicht = zSchneide1 - 60 - lLaufgewicht/2;
#
# Formeln
#
mZylinder(d,l,rho) = rho*(pi/4*d*d*l)
mHohlZylinder(da,di,l,rho) = rho*(pi/4*(da*da-di*di)*l)
JxyZylinder(d,l,rho) = mZylinder(d,l,rho)*(l*l+3*d*d/4)/12
JxyHohlZylinder(da,di,l,rho) = mHohlZylinder(da,di,l,rho)*(l*l+3*(da*da+di*di)/4)/12
# Berechnet gemeinsamen Schwerpunkt der drei Körper (Stab, Festgewicht, Laufgewicht)
zSchwerpunkt(z1,m1,z2,m2,z3,m3)=(m1*z1+m2*z2+m3*z3)/(m1+m2+m3)
# Berechnet gesamtes Schwerpunkstägheitsmoment der drei Körper
JxySchwerpunkt(z1,m1,J1,z2,m2,J2,z3,m3,J3)=J1+m1*(zSchwerpunkt(z1,m1,z2,m2,z3,m3)-z1)**2\
+J2+m2*(zSchwerpunkt(z1,m1,z2,m2,z3,m3)-z2)**2\
+J3+m3*(zSchwerpunkt(z1,m1,z2,m2,z3,m3)-z3)**2
# Berechnet gesamtes Trägheitsmoment der drei Körper um Achse bei z=zAchse
Ja(z1,m1,J1,z2,m2,J2,z3,m3,J3,zAchse)=JxySchwerpunkt(z1,m1,J1,z2,m2,J2,z3,m3,J3)\
+(m1+m2+m3)*(zAchse-zSchwerpunkt(z1,m1,z2,m2,z3,m3))**2
# Berechnet gesamtes reduzierte Pendellänge der drei Körper bei Aufhängung in z=zAchse
lr(z1,m1,J1,z2,m2,J2,z3,m3,J3,zAchse)=Ja(z1,m1,J1,z2,m2,J2,z3,m3,J3,zAchse) \
/((m1+m2+m3)*abs(zAchse-zSchwerpunkt(z1,m1,z2,m2,z3,m3)))
# Berechnung der lonstanten Werte
mStab=mZylinder(dStab,lStab,rhoFe)
mFestgewicht=mHohlZylinder(dFestgewicht,dStab,lFestgewicht,rhoFe)
mLaufgewicht=mHohlZylinder(dLaufgewicht,dStab,lLaufgewicht,rhoFe)
JxyStab=JxyZylinder(dStab,lStab,rhoFe)
JxyFestgewicht=JxyHohlZylinder(dFestgewicht,dStab,lFestgewicht,rhoFe)
JxyLaufgewicht=JxyHohlZylinder(dLaufgewicht,dStab,lLaufgewicht,rhoFe)
# Definition von lr1(x) und lr2(x) als Funktion der Position des Laufgewichtes
lr1(x)= lr(zStab,mStab,JxyStab,zFestgewicht,mFestgewicht,JxyFestgewicht,\
x,mLaufgewicht,JxyLaufgewicht,zSchneide1)
lr2(x)= lr(zStab,mStab,JxyStab,zFestgewicht,mFestgewicht,JxyFestgewicht,\
```

```

x,mLaufgewicht,JxyLaufgewicht,zSchneide2)

# Berechnung von T1(x) bzw. T2(x) aus lr1(x) und lr2(x)
g=9813
T1(x)=2*pi*sqrt(lr1(x)/g)
T2(x)=2*pi*sqrt(lr2(x)/g)

set xlabel "Abstand von Schneide 2 [RM]"
set ylabel "Periodendauer [s]" rotate parallel
set key inside top center vertical spacing 1.4

# Plot als eps-File erzeugen
set terminal postscript eps color font "Times-Roman,20"
set encoding iso_8859_1
set output "TversusX.eps"

plot [x=4:38] T1(zSchneide2+lLaufgewicht/2+20*x) title "Schneide 1" lt rgb "red",\
          T2(zSchneide2+lLaufgewicht/2+20*x) title "Schneide 2" lt rgb "blue"

# Definition von Ja1(x), Ja2(x), Js(x) als Funktion der Position des Laufgewichtes
Ja1(x)=Ja(zStab,mStab,JxyStab,zFestgewicht,mFestgewicht,JxyFestgewicht,\
          x,mLaufgewicht,JxyLaufgewicht,zSchneide1)
Ja2(x)=Ja(zStab,mStab,JxyStab,zFestgewicht,mFestgewicht,JxyFestgewicht,\
          x,mLaufgewicht,JxyLaufgewicht,zSchneide2)
Js(x)=JxySchwerpunkt(zStab,mStab,JxyStab,zFestgewicht,mFestgewicht,JxyFestgewicht,\
                    x,mLaufgewicht,JxyLaufgewicht)

set ylabel "Trägheitsmoment [kg m^2]" rotate parallel
set key inside center right vertical spacing 1.4

set output "JversusX.eps"

plot [x=4:38] Ja1(zSchneide2+lLaufgewicht/2+20*x)/1e9 title "Schneide 1" lt rgb "red",\
          Ja2(zSchneide2+lLaufgewicht/2+20*x)/1e9 title "Schneide 2" lt rgb "blue",\
          Js(zSchneide2+lLaufgewicht/2+20*x)/1e9 title "Schwerpunkt" lt rgb "green"

```

5.2 Skript Amplitudenabhaengigkeit.gnuplot

```
# Plot als eps-File erzeugen
set terminal postscript eps color font "Times-Roman,20" enhanced linewidth 1 size 5,3.5
# 127x89mm
# %%BoundingBox: 50 50 410 302
set output "Amplitudenabhaengigkeit-Platz3Schneide2-20160504.eps"
set encoding iso_8859_15

# Auswertung Amplitudenabhängigkeit
# Datendatei enthält 3 Spalten
# phi^2 T uT
# phi im Bogenmaß

#Setzen des Wertes für den Schwerpunktabstand der Schneide [mm]
a=980.4-310

# Definition der Fitfunktionen
# Gleichung 3
t3(x) = T3*(1 + x/16)
# Gleichung 5,
t5(x) = T5*(1+x/16-b/(a*pi*sqrt(x)))
# Festlegen der Startwerte ( Zeiten [s], Schneidenbreite [mm] )
T3=2
T5=2
b=0.005
# Fit mit Gleichung 3
fit t3(x) "Amplitudenabhaengigkeit-Platz3Schneide2-20160504.dat" using 1:2:3 yerr via T3
# Fit mit Gleichung 5
fit t5(x) "Amplitudenabhaengigkeit-Platz3Schneide2-20160504.dat" using 1:2:3 yerr via T5,b

set xlabel "{/Symbol a}_{0}^{2}"
set ylabel "T [s]" rotate parallel
set key inside left vertical spacing 1.4

plot "Amplitudenabhaengigkeit-Platz3Schneide2-20160504.dat" using 1:2:3 with errorbars pt 7 ps 0.75 \
title "Schneide 2", t3(x), t5(x)
```

Literatur

Physikalisches Grundpraktikum: Mechanik und Thermodynamik

Versuch **M9**: Reversionspendel, Seiten 51...54

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der HUB

Institut für Physik (**2012**)

[http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Mechanik und Thermodynamik/PDFDateien/
Mechanik und Thermodynamik.pdf](http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Mechanik%20und%20Thermodynamik/PDFDateien/Mechanik%20und%20Thermodynamik.pdf)

abgerufen am 6.3.2016 19:03 Uhr

J. G. F. Bohnenberger

Astronomie

Drittes Buch, Kapitel II, §266, Seiten 447 ... 449 und Tafel VI, Zeichnung 102

Tübingen (**1811**)

H. Kater

An Account of Experiments for Determining the Length of the Pendulum Vibrating Seconds in the Latitude of London

Philosophical Transactions of the Royal Society of London

Vol.108, pages 33...102 (**1818**)

F. W. Bessel

Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin (**1828**)

J. G. F. Bohnenberger

Ueber die Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels

Naturwissenschaftliche Abhandlungen,

Herausgegeben von einer Gesellschaft in Württemberg

Erster Band, Drittes Heft, Seiten 1 - 34 und Tafel I

Tübingen (**1827**)

F. W. Bessel

Construction eines symmetrisch geformten Pendels mit reciproken Axen

Astronomische Nachrichten

Band 30, Heft 1, (No. 697), Seite 1 ... 6 (**1850**)

F. R. Helmert

Beiträge zur Theorie des Reversionspendels

Veröffentlichung des Königl. Preussischen Geodätischen Instituts

und Centralbureaus der Internationalen Erdmessung

Potsdam (**1898**)

J. H. Poynting and J. J. Thomson

A Text-Book of Physics, Properties of Matter

Chapter II. The Acceleration of gravity, pages 7 ... 20

London (**1902**)

F. Kühnen, Ph. Furtwängler

Bestimmung der absoluten Größe der Schwerkraft zu Potsdam

mit Reversionspendeln

Veröffentlichung des Königl. Preussischen Geodätischen Instituts

Neue Folge No. 27, Berlin (**1906**)

- R.M. Dreizler und C.S. Lüdde
Theoretische Physik Band 1: Theoretische Mechanik
Springer **2008** ISBN 978-3-540-70557-4
<http://www.springer.com/de/book/9783540705574>
abgefufen am 2.2.2018 17:39 Uhr
- A. H. Cook
The Absolute Determination of the Acceleration Due to Gravity
Metrologia Vol. 1, pages 84 ... 114 (**1965**)
- D. Candela, K. M. Martini, R. V. Krotkov und K. H. Langley
Bessel's improved Kater pendulum in the teaching lab
Am. J. Phys. Vol 69, No. 6, pages 714 ... 720 (**2001**)
- Joachim Höpfner
Absolute Bestimmung der Schwere mit Reversionspendeln in Potsdam
1898 - 1904 und 1968 - 1969
Deutschen Gesellschaft für Chronometrie, Jahresschrift
Band 51, Seiten 101 ... 114 (**2012**)
- Guido Dhondt, Klaus Wittig
CalculiX CrunchiX (ccx) und CalculiX GraphiX 2.11 (cgx)
Version 2.11 (**2016**)
<http://www.calculix.de/>
abgerufen am 4.10.2016 10:04 Uhr